## ЕГЭ профиль. Шпаргалка по первой части

### Задача 1.

**Процент** - это сотая часть числа. $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01.$

Чтобы найти $p\%$ от числа $x$, необходимо умножить число $x$ на $p$ сотых. Получим $\frac{p}{100} \cdot x$.

Чтобы увеличить число $x$ на $p\%$, нужно число $x$ умножить на величину $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, получим $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x$.

Чтобы уменьшить число $x$ на $p\%$, нужно число $x$ умножить на величину $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$, получим $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$.

**Правило округления**: если число округляют до какого-нибудь разряда, то все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. При этом если первая отброшенная или замененная нулем цифра равна 5, 6, 7, 8 или 9, то стоящую перед ней цифру увеличивают на 1; а если первая отброшенная или замененная нулем цифра равна 0, 1, 2, 3 или 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменения.

**Правило округления с избытком и недостатком.** Округление с избытком или недостатком до ближайшего целого осуществляется по здравому смыслу: если мы спасаем людей, то количество спасательных лодок округляем с избытком; если покупаем товар на имеющиеся деньги, то количество единиц товара, которое можем купить, округляем с недостатком.

### Задача 2.

Задача на внимательность! Аккуратно читаем условие и вопрос задачи.

### Задача 4.

**Элементарный исход** – простейшее событие, которым может окончиться случайный эксперимент.

**Вероятность** случайного события $A$ равна отношению числа $m$ благоприятных исходов к общему числу $n$ исходов, то есть $p(A) = \frac{m}{n}$.

**Противоположное** событию $A$ событие $\bar{A}$ состоит только из тех исходов, которые являются неблагоприятными для события $A$. При этом вероятность наступления события $\bar{A}$ находится по формуле $\boldsymbol{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$**.**

**Несовместные** события $A$ и $B$ – события, которые не наступают одновременно. Формула сложения вероятностей для несовместных событий: вероятность наступления какого-либо из двух несовместных событий равна сумме вероятностей наступления этих событий (по отдельности), то есть $\boldsymbol{p(A \text{ или } B) = p(A) + p(B)}$**.**

**Независимые** события $A$ и $B$ – такие события, вероятность наступления каждого из которых не зависит от наступления другого. Формула умножения вероятностей для независимых событий: вероятность наступления двух независимых событий одновременно равна произведению вероятностей наступления этих событий (по отдельности), то есть $\boldsymbol{p(A \text{ и } B) = p(A) \cdot p(B)}$**.**

## Задачи 5/9/10. Алгебра

**Действия с дробями**.

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Чтобы сложить или вычесть две дроби с разными знаменателями, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю.

Умножение дробей: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$.

Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить первую дробь на дробь, обратную второй: $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$.

Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель, и разделить степень числителя на степень знаменателя.

**Формулы сокращенного умножения**:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

**Арифметическим корнем** $n-$й степени из неотрицательного числа $a$ называется неотрицательное число $b$, $n$-я степень которого равна числу $a$. Обозначение $b = \sqrt[n]{a}$. По определению $b^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

**Свойства.** Если $a$ и $b$ – неотрицательные числа, $n$ и $k$ – натуральные числа, отличные от единицы, то:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

**Свойства показательной функции:**

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Пусть $n$ – натуральное число, отличное от единицы, и $k$ – целое число, тогда:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

Пусть $a$ и $b$ – положительные числа, причем $a \neq 1$. **Логарифмом** числа $b$ по основанию числа $a$ называется показатель степени, в которую надо возвести число $a$, чтобы получить число $b$. Для логарифма используется обозначение $\log_a b$. **По определению $\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$.**

Логарифм положительного числа $b$ по основанию числа 10 называется десятичным логарифмом и обозначается $\lg b$.

Логарифм положительного числа $b$ по основанию числа $e$ называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln b$.

**Свойства логарифмов.** Пусть $a, b, x, y$ – положительные числа, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Имеют место следующие соотношения:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$n \cdot \log_a x = \log_a x^n$$

$$\frac{1}{m} \cdot \log_a x = \log_{a^m} x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

## Задачи 5/10. Уравнения

Решением **линейного** уравнения вида $ax = b$ при $a \neq 0$ является $x = \frac{b}{a}$.

Для решения **квадратного** уравнения необходимо привести его к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и вычислить дискриминант $D = b^2 - 4ac$. При этом,

если $D > 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

если $D = 0$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{-b}{2a}$.

если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ можно решить разложением на множители $x \cdot (ax + b) = 0$. Тогда корни $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Неполное квадратное уравнение вида $x^2 = q$ при $q > 0$ имеет два корня $x = \pm\sqrt{q}$, при $q = 0$ один корень $x = 0$ и не имеет корней при $q < 0$.

**Рациональные** уравнения приводятся к целым путем умножения обеих частей уравнения на общее кратное знаменателей всех дробей.

**Степенные** уравнения вида $x^n = a$ решаются извлечением корня $n$-й степени из обеих частей. При этом,

если $n$ – нечетное число, то $x = \sqrt[n]{a}$;

если $n$ – четное число и $a > 0$, то $x = \pm\sqrt[n]{a}$;

если $n$ – четное число и $a = 0$, то $x = 0$;

если $n$ – четное число и $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

**Иррациональные** уравнения решаются возведением обеих частей в степень. После решения получившегося уравнения необходимо сделать проверку: входят ли найденные корни в область допустимых значений исходного уравнения.

Для решения **показательного** уравнения при $a \neq 1$ необходимо привести его к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, тогда $f(x) = g(x)$. Или привести уравнение к виду $a^{f(x)} = b$, тогда $f(x) = \log_a b$.

Для решения **логарифмического** уравнения необходимо привести его к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, тогда $f(x) = g(x)$. Или привести уравнение к виду $\log_a f(x) = b$, тогда $f(x) = a^b$.

## Задача 11.

**Задачи на движение.**

**Основная формула** для решения задач: $\boldsymbol{S = vt}$, где $S$ - расстояние, $v$ - скорость, $t$ - время.

В задачах на движение по воде скорость течения считается постоянной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, при движении против течения – вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

Средняя скорость вычисляется по формуле $v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$, где $S_{\text{общ}}$ – путь, пройденный телом, а $t_{\text{общ}}$ – время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и все время движения.

В задачах на движение протяженных поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, при движении вдоль протяженной платформы – расстояние, равное сумме длин поезда и платформы.

**Задачи на работу.**

**Основная формула** для решения задач: $\boldsymbol{A = wt}$, где $A$ - объем работы, $w$ - производительность, $t$ - время.

Задачи на раздельную работу являются аналогом задач на движение, где скоростью является производительность, а расстоянием – объем выполненной работы. В задачах на совместную работу общая производительность равна сумме производительностей.

**Задачи на концентрацию**. Концентрация вещества с массой $m$ в растворе массы $M$ находится по **формуле** $\boldsymbol{\nu = \frac{m}{M}}$.

## Задачи 3/6/9/10. Тригонометрия

**Тригонометрия прямоугольного треугольника.**

**Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

**Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

**Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

**Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

**Основное тригонометрическое тождество**. Для произвольного угла $\alpha$ выполняется соотношение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

## Таблица значений функций основных углов

| радианы | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| градусы | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | нет | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | нет | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | нет |

## Таблица знаков тригонометрических функций

| четверть | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | + | − | − | − |
| $\cos x$ | + | − | − | + |
| $\operatorname{tg} x$ | + | − | + | − |
| $\operatorname{ctg} x$ | + | − | + | − |

## Свойства тригонометрических функций

Функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными; косинус - четной, то есть:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Функции синус, косинус , тангенс и котангенс являются периодическими, при этом периодом синуса и косинуса является число $2\pi$, а периодом тангенса и котангенса является число $\pi$, то есть:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$$

**Основные формулы тригонометрии**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

## Задачи 3/6. Планиметрия

Угол называется **острым**, если его градусная величина меньше 90°. Угол называется **прямым**, если он равен 90°. Угол называется **тупым**, если его градусная величина больше 90°. Угол называется **развернутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. Градусная величина развернутого угла равна 180°.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие лежат на одной прямой и являются продолжениями одна другой.

**Теорема.** Сумма смежных углов равна 180°.

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

**Теорема.** Вертикальные углы равны.

**Внешним** углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника**.**

Треугольник называется **остроугольным**, если у него все углы острые. Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов равен 90°. Треугольник называется **тупоугольным**, если один из его углов больше 90°.

**Теорема.** Сумма углов любого треугольника равна 180°.

**Теорема**. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Две прямые называются **перпендикулярными**, если при пересечении они образуют четыре прямых угла.

Две прямые называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника.

Отрезок, делящий угол треугольника на два равных угла, называется **биссектрисой** треугольника.

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой** треугольника.

**Серединным перпендикуляром** к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

**Теорема**. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

**Теорема**. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

**Теорема**. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

**Теорема**. Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Равные стороны называются **боковыми**, третья сторона - **основанием** равнобедренного треугольника.

**Теорема**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

**Теорема**. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины к основанию, совпадают между собой.

В **прямоугольном** треугольнике сторона, лежащая напротив прямого угла, называется **гипотенузой** прямоугольного треугольника, две другие стороны - **катетами**.

**Теорема**. Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы.

**Теорема**. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

**Теорема**. Медиана, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

**Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, то есть $c^2 = a^2 + b^2$, где $c$ - гипотенуза, $a$ и $b$ - катеты.

**Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

**Теорема.** Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

**Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

**Теорема.** Противоположные стороны параллелограмма равны.

**Теорема.** Противоположные углы параллелограмма равны.

**Теорема.** Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

**Теорема.** Диагонали параллелограмма делят его на два равных треугольника.

**Прямоугольником** называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

**Теорема.** Диагонали прямоугольника равны.

**Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

**Теорема.** Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

**Квадратом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы равны.

**Теорема.** Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, равны и делят его углы пополам.

**Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие стороны - **боковыми сторонами**. Трапеция называется **равнобедренной,** если ее боковые стороны равны. Трапеция называется **прямоугольной,** если один из ее углов прямой.

**Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

**Теорема.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

**Формулы площади**.

**Треугольник:**

$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = c h_c,$ где $h_a, h_b, h_c$ - высоты, опущенные соответственно на стороны $a, b, c$.

$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, где угол $\gamma$ - угол между сторонами $a$ и $b$.

$S = pr$ , где $p$ - полупериметр, $r$ - радиус вписанной в треугольник окружности.

$S = \frac{abc}{4R}$, где $R$ - радиус окружности, описанной около треугольника.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p$ - полупериметр.

**Прямоугольный треугольник:**

$S = \frac{1}{2} ab$, где $a$ и $b$ - катеты.

**Квадрат**:

$S = a^2$, где $a$ - сторона квадрата.

**Прямоугольник**

$S = ab$, где $a$ и $b$ - стороны прямоугольника.

**Параллелограмм**

$S = ah_a = bh_b$, где $h_a, h_b$ - высоты, опущенные соответственно на стороны $a, b$.

$S = ab\sin\gamma$, где угол $\gamma$ - угол между сторонами $a$ и $b$.

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, где $d_1, d_2$ - диагонали параллелограмма, $\alpha$ - угол между ними.

**Ромб**

$S = ah$, где $a$ - сторона ромба, $h$ - высота ромба.

$S = a^2 \sin\gamma$, где $a$ - сторона ромба, $\gamma$ - угол ромба.

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, где $d_1, d_2$ - диагонали ромба.

**Трапеция**

$S = \frac{a+b}{2}h$, где $a$ и $b$ - стороны трапеции, $h$ - высота.

Треугольники называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Отношение сходственных сторон называется **коэффициентом подобия**.

**Теорема.** Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

**Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром** окружности. Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой, лежащей на окружности, называется **радиусом**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ее **диаметром**.

Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

**Теорема.** Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

**Теорема.** Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным** углом. Величина центрального угла равна дуге окружности, на которую он опирается.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным** углом.

**Теорема.** Величина вписанного угла равна половине дуги окружности, на которую он опирается.

**Теорема.** Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

**Теорема.** Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр) - прямой.

**Теорема.** Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а сам многоугольник - **описанным** около этой окружности.

**Теорема.** В любой треугольник можно вписать окружность. Ее центром является точка пересечения биссектрис этого треугольника.

**Теорема.** Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.

**Теорема.** Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около этого многоугольника, а сам многоугольник - в**писанным** в эту окружность.

**Теорема.** Около любого треугольника можно описать окружность. Ее центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника.

**Теорема.** Если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180°.

**Теорема.** Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

**Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними, то есть $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

**Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Все эти отношения равны удвоенному радиусу окружности, описанной около этого треугольника, то есть

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

**Правильным** называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

**Теорема.** В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

**Теорема.** Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

**Теорема.** Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в этот многоугольник.

Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$.

## Задача 8. Стереометрия

**Куб** – правильный многогранник, каждая грань которого является квадратом. Все ребра куба равны между собой.

**Объем** куба $V = a^3$. **Площадь поверхности** куба $S = 6a^2$. **Диагональ** куба $d = a\sqrt{3}$.

**Прямоугольный параллелепипед** – многогранник, каждая грань которого является прямоугольником.

**Объем** параллелепипеда $V = abc$. **Площадь поверхности** параллелепипеда $V = 2(ab + ac + bc)$. **Диагональ** параллелепипеда $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$\boldsymbol{n}$**-угольной призмой** называется многогранник, две грани которого – равные $n$-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные $n$ граней – параллелограммы. $n$ -угольники называются основаниями призмы, остальные грани – боковыми гранями призмы.

**Правильной призмой** называется прямая призма, основания которой – правильные многоугольники. Высота правильной призмы равна ее боковому ребру, а все боковые грани прямой призмы – равные прямоугольники.

**Объем** призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. **Площадь боковой поверхности** прямой призмы $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$. **Площадь полной поверхности** призмы $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$

**Пирамидой** называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, – вершины пирамиды, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами пирамиды.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник. **Высотой** пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. Высота боковой грани пирамиды, проведенная к стороне основания, называется **апофемой**.

Пирамида называется **правильной**, если ее основание – правильный многоугольник, а основание ее высоты – центр этого многоугольника.

Треугольная пирамида называется также **тетраэдром**. Частным случаем правильной треугольной пирамиды является **правильный тетраэдр**, все грани которого представляют собой равные правильные треугольники.

**Объем** пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$. **Площадь боковой поверхности** правильной пирамиды $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{бок}}$. **Площадь полной поверхности** пирамиды $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

**Цилиндром (круговым)** называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону. У цилиндра два **основания** – два круга, лежащие в параллельных плоскостях. Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей оснований, называются **образующими** цилиндра.

**Радиусом** цилиндра называется радиус его основания. **Высотой** цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. **Осью** цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Все образующие цилиндра параллельны и равны между собой. Ось цилиндра параллельна образующим.

**Осевым сечением** цилиндра называется сечение, проходящее через ось цилиндра.

**Объем** цилиндра $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi R^2 h$. **Площадь боковой поверхности** цилиндра $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h = 2\pi R h$. **Площадь полной поверхности цилиндра** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R h + 2\pi R^2$.

**Конусом (круговым)** называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. У конуса **основание** – круг. **Вершина** конуса – вершина треугольника, не лежащая в основании конуса. Отрезки, соединяющие точки окружности основания с вершиной конуса, называются **образующими** конуса.

**Радиусом** конуса называется радиус его основания. **Высотой** конуса называется расстояние от вершины конуса до плоскости его основания. **Осью** конуса называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания. Все образующие конуса равны между собой.

**Осевым сечением** конуса называется сечение, проходящее через ось конуса.

**Объем** конуса $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$. **Площадь боковой поверхности** конуса $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} C_{\text{осн}} \cdot l = \pi R l$. **Площадь полной поверхности** конуса $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi R l + \pi R^2$.

**Шаром** называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного, от фиксированной точки. Эта точка называется **центром** шара, а расстояние – **радиусом** шара. **Сферой** называется поверхность шара. Любое сечение шара является кругом.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется **диаметральной плоскостью**. Сечение шара диаметральной плоскостью называется **большим кругом**.

**Объем** шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **Площадь поверхности** сферы $S = 4\pi R^2$.

## Задачи 7/12. Начала анализа

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Предел отношения приращения $\Delta y$ функции в этой точке (если он существует) к приращению $\Delta x$ аргумента при условии приращению $\Delta x \to 0$, называется **производной** функции $f(x)$ в точке $x_0$. Обозначение $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Физический смысл производной.** Производная показывает (мгновенную) скорость изменения функции.

**Геометрический смысл производной**. Если к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ можно провести касательную $y = kx + m$, то производная функции $f(x)$ в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, то есть $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$, где $\alpha$ - угол между положительным направлением оси $Ox$ и касательной.

Если к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ можно провести касательную $y(x)$, то выполняются условия:

$$\begin{cases} f(x_0) = y(x_0) \\ f'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

**Применение к производной к исследованию функции.**

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $M$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $M$.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $M$, то функция $f(x)$ убывает на интервале $M$.

Если точка $x_0$ является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и при этом $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка $x_0$ является точкой максимума функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и при этом $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка $x_0$ является точкой минимума функции $f(x)$.

Проще говоря, если в точке $x_0$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x_0$ является точкой максимума; а если производная меняет знак с минуса на плюс, то $x_0$ является точкой минимума.

**Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $\boldsymbol{f(x)}$ на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$.**

1. Находим производную $f'(x)$.

2. Решаем уравнение $f'(x) = 0$.

3. Отбираем те решения уравнения$f'(x) = 0$, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.

4. Вычисляем значение функции $f(x)$ во всех отобранных точках и концах отрезка.

5. Выбираем из всех найденных значений наибольшее и наименьшее.

**Правила дифференцирования**. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые, $C$ - число. Тогда имеют место соотношения:

$$C' = 0$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(Cf)' = Cf'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

$$\left(f(ax + b)\right)' = af'(ax + b)$$

**Таблица производных основных элементарных функций**

$$C' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на множестве $M$, если для всех $x \in M$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.